I. Supersymétrie

1) Coleman Mandula + Haag-Lopuszanski-Sohnius

(1960. 1970)

SUSY ⇒ naturel à partir des th. de Noether et spin-stat.

Soit une QFT avec $\{\underset{\text{boson}}{\phi^a}, \underset{\text{fermion}}{\psi^i}\}$. Soit une symétrie.

$\hookrightarrow \phi^a \to \phi^a + \delta\phi^a$
$\psi^i \to \psi^i + \delta\psi^i$

Si on introduit les générateurs de la symétrie:

$$\delta\phi^a = (B_A^1)^a{}_b\, \phi^b$$
$$\delta\psi^i = (B_A^2)^i{}_j\, \psi^j$$

Le lagrangien $\mathcal{L}$ est invariant.

$$\to \delta\mathcal{L} = \partial_\mu j^\mu$$
$$= \partial_\mu \underbrace{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\delta\phi^a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^i)}\delta\psi^i\right]}_{\text{courant}}$$

Th. de Noether nous dit que la composante temporelle intégrée sur l'espace est conservée.

$$B_A = -i\int d^3x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^a)}\delta\phi^a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi^i)}\delta\psi^i\right]$$
$$= -i\int d^3x \left[\pi_a (B_A^1)^a{}_b\, \phi^b + \rho_i (B_A^2)^i{}_j\, \psi^j\right]$$

moments conjugués

Quelle est l'algèbre satisfaite par les B_A ?

spin-stat : $[\phi, \pi] = \delta^{(3)}$ et $\{\psi, \rho\} = \delta^{(3)}$ (les autres $[\,,\,] = 0$)

$[B_A, B_B] = \,?$ avec $[B_A^1, B_B^1] = i f_{AB}{}^C B_C^1$ (2 sym. donne 1 sym.)

$\hookrightarrow [B_A, B_B] = f_{AB}{}^C B_C$ $\qquad [B_A^2, B_B^2] = i f_{AB}{}^C B_C^2$

$\Rightarrow$ on obtient une algèbre de Lie.

Coleman et Mandula (1967) : cette algèbre de Lie est :

$$g = \underbrace{iso(1,3)}_{\text{Poincaré}} \times \underbrace{g_{int}}_{\text{algèbre compacte de Lie.}}$$

(interactions de jauge par exemple)

<u>Généralisation</u> :
$$\delta\phi^a = (F_I^1)^a{}_i\, \psi^i \qquad \text{opérateurs fermioniques}$$
$$\delta\psi^i = (F_I^2)^i{}_b\, \phi^b$$

Même exercice $\rightsquigarrow$ charges conservées $\rightsquigarrow$ algèbre

$$[B_A, B_B] = i f_{AB}{}^C B_C \qquad \text{[algèbre de Lie]}$$
$$\{F_I, F_J\} = Q_{IJ}{}^C B_C$$
$$[B_A, F_I] = i R_{AI}{}^J F_J$$

superalgèbre de Lie.

Généralisation de CM : Haag - Lopuszanski - Sohnius.

l'algèbre $g = g_0 \oplus g_1$

g_0 : bosonique

g_1 : fermionique $\rightarrow$ opérateurs non triviaux sous g_0

$\hookrightarrow$ CM : $g_0 = iso(1,3) \times g_{int}$

Le cas le plus simple : $g_1 = \{1 \text{ spineur de Majorana}\}$

$$= \{Q_\alpha\} \oplus \{\bar{Q}^{\dot\alpha}\} \equiv \text{supercharges}$$

Un cas concret : la superalgèbre de Poincaré

$$g_0 \left[\begin{array}{l} [M,M] \sim M \\ [M,P] \sim P \\ [P,P] \sim 0 \end{array} \right) \text{Poincaré} \qquad \underbrace{[T_a, T_b] = i f_{ab}{}^c T_c}_{\text{jauge}}$$

$$\text{CM : } [M,T] = [P,T] = 0$$

$$[Q_\alpha, M^{\mu\nu}] = (\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta \qquad [\bar{Q}, M] \sim \bar{Q}$$

$$[Q,P] = [\bar{Q},P] = \{Q,Q\} = \{\bar{Q},\bar{Q}\} = 0$$

$$[T,Q] = [T,\bar{Q}] = 0$$

$$\boxed{\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}} P_\mu} \qquad \text{" SUSY} = \sqrt{\text{translation}} \text{ "}$$

2) Representation

Algèbre de Poincaré : 2 Casimir $C_2 = P^\mu P_\mu \rightsquigarrow$ masse

$\cancel{C_4 = W^\mu W_\mu} \rightsquigarrow$ spin

repr : $|C_2, C_4 ; p^\mu, \lambda\rangle$

ne commute pas avec $Q, \bar{Q}$
C_4 ne caractérise pas une repr. de la superalgèbre

Dans une représentation, on a des fermions ET des bosons
On peut démontrer qu'on a N fermions et N bosons

- **Représentations non massives**

- un objet non massif $\Rightarrow p^\mu = (E, 0, 0, E)$
- une transformation de Lorentz : $p^\mu \to p'^\mu \; (= \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu)$

la petite algèbre ~ transformations telles que $p'^\mu = p^\mu$

$$\left.\begin{array}{l} * \text{ rotations autour de l'axe } z : \; \Pi^{12} = M \\ * \begin{cases} T^1 = \Pi^{10} - \Pi^{13} \\ T^2 = \Pi^{20} - \Pi^{23} \end{cases} \text{ translations} \end{array}\right] iso(2)$$

$\to$ on ignore les translations car continues.

on a $|0, 0 ; p^\mu, \lambda\rangle$

C_2, C_4, impulsion, val. propre de M

Ajoutons les supercharges Q et $\bar{Q}$

$[\Pi, Q_1] = \frac{1}{2} Q_1$ $\qquad [\Pi, \bar{Q}_{\dot\alpha}] = -\frac{1}{2}\bar{Q}_{\dot\alpha}$ $\qquad \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\alpha}\} = 4E\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$[\Pi, Q_2] = -\frac{1}{2} Q_2$

vide annihilé par Q_2

- $0 = \langle \Omega | \{Q_2, \bar{Q}_{\dot 2}\} | \Omega\rangle = \langle \Omega | Q_2 \bar{Q}_{\dot 2} | \Omega\rangle = \| \bar{Q}_{\dot 2}|\Omega\rangle\|^2$

$\hookrightarrow Q_2 = \bar{Q}_{\dot 2} = 0 \quad \Rightarrow$ 2 supercharges actives : Q_1 et $\bar{Q}_{\dot 1}$

$\Rightarrow$ 2 opérateurs de création et annihilation : $\begin{cases} a^\dagger \sim \bar{Q}_{\dot 1} \\ a \sim Q_1 \end{cases}$

Que font ces opérateurs de création / annihilation ?

$$\left.\begin{array}{l} M\, a\, |0,0; p^\mu, \lambda\rangle = (\lambda + \frac{1}{2})\, a\, |0,0;p^\mu,\lambda\rangle \\ \Pi\, a^\dagger |0,0;p^\mu,\lambda\rangle = (\lambda - \frac{1}{2})\, a^\dagger |0,0;p^\mu,\lambda\rangle \end{array}\right) \begin{array}{l} a, \text{ et } a^\dagger \text{ changent} \\ \text{l'hélicité de } \frac{1}{2} \end{array}$$

Pour construire les multiplets : on part de l'état d'hélicité maximum $|\Omega_\lambda\rangle$ et puis on applique a et $a^\dagger$ autant de fois que possible.

$$|\Omega_\lambda\rangle \begin{cases} \to a|\Omega_\lambda\rangle = 0 \\ \to a^\dagger|\Omega_\lambda\rangle \to \text{état d'hélicité } \lambda - \tfrac{1}{2} \to a^\dagger a^\dagger |\Omega_\lambda\rangle = 0 \end{cases}$$

Un supermultiplet = 2 états d'hélicité différant de $\frac{1}{2}$.

Matière

hélicité	$\|\Omega_{1/2}\rangle$	$\|\Omega_{-1/2}\rangle$
$1/2$	1	
0	1	1
$-1/2$		1

1 fermion de Weyl
+ 1 scalaire complexe

Jauge

hélicité	$\|\Omega_1\rangle$	$\|\Omega_{-1}\rangle$
$+1$	1	
$+1/2$	1	
0		
$-1/2$		1
-1		1

1 boson de jauge non massif (réel)
1 spineur de Majorana

Off-shell : un spineur de Weyl a 4 dof $\Rightarrow$ il manque 2 degrés de liberté bosoniques $\Rightarrow$ champs auxiliaires "F-terms"

- idem pour le supermultiplet de jauge "D-terms"

3) Lagrangiens

- Supermultiplet de matière : $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ scalaire } \phi \\ 1 \text{ fermion } \psi \\ 1 \text{ champ auxiliaire } F \ (\text{avec } F=0 \text{ on-shell}) \end{array} \right.$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi_i^\dagger \partial^\mu \phi^i + \frac{i}{2}\left(\psi^i \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}_i - \partial_\mu \psi^i \sigma^\mu \bar{\psi}_i \right) + F_i^\dagger F^i$$

(pas d'interaction)

avec $i = 1, \ldots, N$ (on a N supermultiplets)

Toutes les interactions permises par la supersymétrie découlent d'une quantité appelée <u>superpotentiel</u> = fonction holomorphique des champs scalaires

$$\mathcal{L}_W = -W_i F^i - W^{*i} F_i^\dagger - \frac{1}{2} W_{ij} \psi^i \cdot \psi^j - \frac{1}{2} W^{*ij} \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j$$

$$W_i = \frac{\partial W}{\partial \phi^i} \qquad W_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^i \partial \phi^j}$$

et $W = W(\phi) = \alpha_i \phi^i + \beta_{ij} \phi^i \phi^j + \lambda_{ijk} \phi^i \phi^j \phi^k$

Rq : les interactions modifient les éq. du mouvement pour F : $F^i = W^{*i}$

$\Rightarrow V_F = W^{*i} W_i$ ≡ potentiel scalaire

- Supermultiplet de jauge : $\begin{array}{l} 1 \text{ vecteur réel } V_\mu^a \\ 1 \text{ spineur de Majorana } \lambda_\mu^a \\ 1 \text{ champ auxiliaire } D^a \end{array}$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\left(\lambda_a \sigma^\mu \underbrace{D_\mu}_{\text{dérivées covariantes}} \bar{\lambda}^a - D_\mu \lambda_a \sigma^\mu \bar{\lambda}^a \right) + \frac{1}{2} \underbrace{D^a D_a}_{\text{éq. du mvt : } D^a = 0}$$

- Théorie de jauge SUSY.

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{L}_{SUSY} = {} & D_\mu \phi_i^\dagger D^\mu \phi^i + \frac{i}{2}\left(\psi^i \sigma^\mu D_\mu \bar{\psi}_i - D_\mu \psi^i \sigma^\mu \bar{\psi}_i\right) + F_i^\dagger F^i \\ & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\left(\lambda_a \sigma^\mu D_\mu \bar{\lambda}^a - D_\mu \lambda_a \sigma^\mu \bar{\lambda}^a\right) + \frac{1}{2} D_a D^a \\ & + i\sqrt{2}\, g\, \bar{\lambda}^a \cdot \bar{\psi}_i (T_a \phi)^i - i\sqrt{2}\, g\, \phi_i^\dagger (T_a \psi)^i \cdot \lambda^a - g D^a \phi_i^\dagger (T_a \phi)^i \\ & + \mathcal{L}_W\end{aligned}}$$

Le potentiel scalaire : $V = \frac{1}{2} D_a D^a + F^i F_i^\dagger$

Eqs du mvt pour les champs auxiliaires : $F^i = W^{*i}$

$$D^a = g\, \phi_i^\dagger (T^a \phi)^i$$

④ Brisure de supersymétrie

- La masse de tous les champs d'un supermultiplet donné est la même
  $\Rightarrow$ problème (exclu expérimentalement)

  $\Rightarrow$ brisure de SUSY

  (1) Brisure douce (lié au pb de hiérarchie)

  (2) On a un actuel : BSS

- Th. de Goldstone pour la SUSY : $\exists$ fermion non massif résultant de la BSS.

  $|\Omega\rangle$ = vide tel que $Q_\alpha |\Omega\rangle \neq 0$ $\to$ état du vide non SUSY

  $\langle \Omega | E | \Omega \rangle \neq 0 \iff \langle V \rangle = \langle F^i F_i^\dagger + \frac{1}{2} D^a D_a \rangle > 0$

  $\to$ on peut briser la supersymétrie à l'aide de termes F et/ou D.

Le minimum du potentiel → dérivées premières :

$$\left\langle \frac{\partial V}{\partial \phi_j} \right\rangle = 0 = \left\langle F^i W_{ij} + D^a (g\phi^\dagger T_a)_j \right\rangle$$

De plus : $F^i \, i g \omega^a (\phi^\dagger T_a)_i = 0$ (transf. de jauge de param. ω^a)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{pmatrix} \langle W_{ij} \rangle & g \langle (\phi^\dagger T_a)_j \rangle \\ g \langle (\phi^\dagger T_a)_i \rangle & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \langle F^i \rangle \\ \langle D_a \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

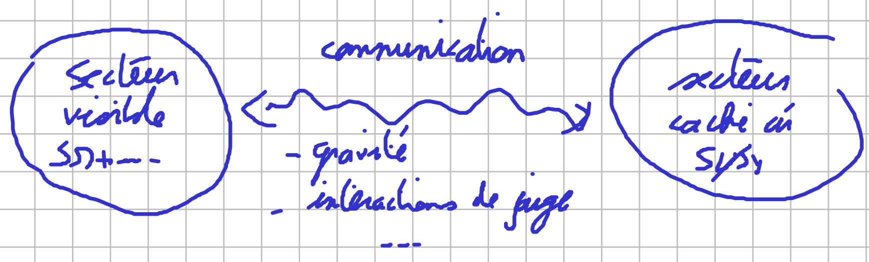
⇒ caractérisation du vide.

→ matrice de masse des fermions

On peut montrer que $|\psi_G\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \langle F_i^\dagger \rangle |\psi^i\rangle + \frac{i}{2} \langle D^a \rangle |\lambda^a\rangle$ est non massif

≡ Goldstino

Petit souci : la brisure par termes F ou D ne marche pas (expérimentalement exclu) ⇒ $\cancel{SUSY}$ via des interactions non renormalisable ou radiativement



Conséquences :
- termes de masse pour les jauginos
- termes de masses pour les scalaires
- interactions multiscalaires (même forme que W)

⑤ Le MSSM

Supersymétrisation du SM de façon minimale

→ on doit introduire des partenaires SUSY (ou superpartenaire) à chaque champ du SM.

▷ Fermions ⇝ sfermions (partenaires scalaires) — superm. de matière

▷ Bosons de jauge ⇝ jauginos (fermioniques) — superm. de jauge

Secteur de la matière:

	SM (spin 1/2)	superpartenaires (spin 0)
Q_L	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{d}_L \end{pmatrix}$
L_L	$\begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L \\ \tilde{e}_L \end{pmatrix}$
u_R, d_R, e_R	u_R, d_R, e_R	$\tilde{u}_R, \tilde{d}_R, \tilde{e}_R$

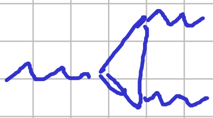
Secteur de jauge:

	SM (spin 1)	superp. (spin 1/2)
V_B	B_μ	$\tilde{B}$
V_W	W_μ^i $(i=1,..,3)$	$\tilde{W}^i$
V_G	g_μ^a $(a=1,..,8)$	$\tilde{g}^a$

Secteur de Higgs:

	SM (spin 0)	superp. (spin 1/2)	
H_u	$\begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{H}_u^+ \\ \tilde{H}_u^0 \end{pmatrix}$	$\leftarrow Y = +\frac{1}{2}$
H_d	$\begin{pmatrix} H_d^0 \\ H_d^- \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{H}_d^0 \\ \tilde{H}_d^- \end{pmatrix}$	$\leftarrow Y = -\frac{1}{2}$

- Il faut deux doublets pour donner des masses à TOUS les fermions du SM.
- On ne veut pas d'anomalies



$= 0$ si les contributions de $\tilde{H}_u$ compensent celles de $\tilde{H}_d$ (higgsinos)

Les interactions (non de jauge) découlent du superpot :

$$W_{MSSM} = \tilde{u}_R^{+} y^u \tilde{Q}_L \cdot H_U - \tilde{d}_R^{+} y^d \tilde{Q}_L \cdot H_D - \tilde{e}_R^{+} y^e \tilde{L}_L \cdot H_D$$
$$+ \mu H_U \cdot H_D$$

\+ lagrangien de brisure de SUSY (105 paramètres !)

En fait, on a ignoré des termes dans W :

$$W_{RPV} = \frac{1}{2} \lambda \tilde{L}_L \tilde{L}_L \tilde{e}_R^{+} + \lambda' \tilde{L}_L \cdot \tilde{Q}_L \tilde{d}_R^{+} + \frac{1}{2} \lambda'' \tilde{u}_R^{+} \tilde{d}_R^{+} \tilde{d}_R^{+}$$
$$- K \tilde{L}_L \cdot \tilde{H}_U$$

induit la désintégration du proton

Chacun de ses termes viole soit B, soit L $\Rightarrow$ on veut les interdire

$\Rightarrow$ introduction de la parité R :

$$R = (-1)^{3B+L+2S} \begin{cases} \to SM : +1 \\ \to \text{superp} : -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ W_{RPV} est interdit.

$\Rightarrow$ pour tout vertex d'interaction, on a un nombre pair de particules SUSY

$\Rightarrow$ la LSP est stable $\Rightarrow$. matière noire (si neutre)

. production des particules SUSY par paires au LHC

• Après SUSY, on a EW $\Rightarrow$ mélange des particules de m̂ spin, rep. de couleur et de charge

a) $H_d^0, H_u^0 \Rightarrow h, H, a + G^0 \rightsquigarrow$ masse au boson Z

$H_d^-, H_u^+ \Rightarrow H^\pm + G^\pm \rightsquigarrow$ masse des $W^\pm$

↳ 5 Higgs physiques

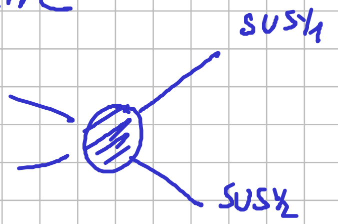
b) $\tilde{H}_d^0, \tilde{H}_u^0, \tilde{B}, \tilde{W}^3 \rightsquigarrow$ neutralinos $\tilde{\chi}_i^0$ $(i=1, \dots, 4)$

$\tilde{H}_d^-, \tilde{H}_u^+, \tilde{W}^\pm \rightsquigarrow$ charginos $\tilde{\chi}_i^\pm$ $(i = 1, 2)$

c) $\tilde{f}_L, \tilde{f}_R \rightsquigarrow \tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ (en général, le mélange est prop. à m_f)

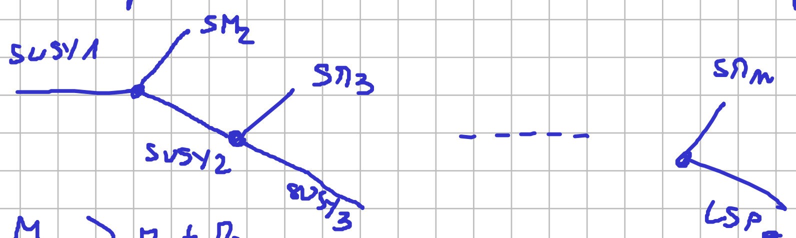
• Pheno

1 LHC



on produit les particules SUSY par paires (cf. R-parité)

Les particules SUSY sont instables et à faible durée de vie

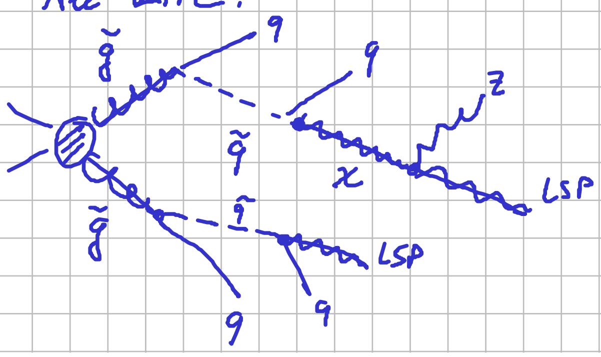


stable (sinon on viole la cosmologie)

$M_1 > M_2 + m_{SM_2}$

$M_2 > M_3 + m_{SM_3}$

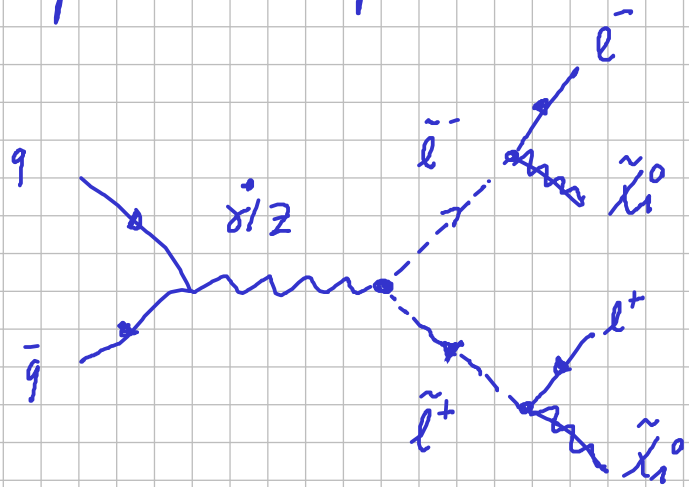
Au LHC :



signal typique : $\not{E}_T$ + jets + leptons

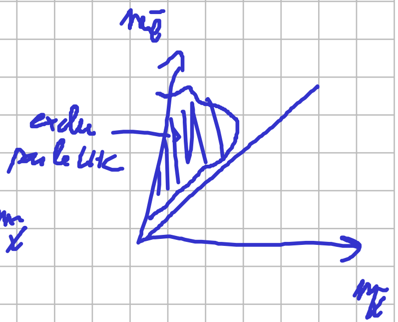
signature typique de DM (dont la SUSY)

ex : production des sleptons :



$pp \to 2\ell + \not{E}_T$

(cas le plus simple)

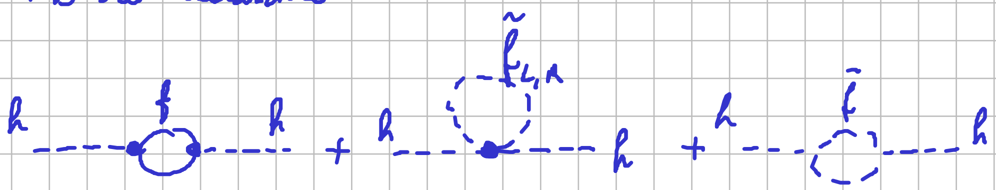


2 paramètres de nouvelle physique : $m_{\tilde\ell}$, $m_{\tilde\chi}$

2) DM : on a un candidat (la LSP neutre)

3) Unification des symétries internes et externes

4) Pb de hiérarchie



annule la dépendance en Λ^2

$$\Rightarrow \delta m_h^2 \sim m_{f}^2 \log \frac{m_{\tilde f}^2}{\Lambda^2}$$

ne peut pas être trop grand $\Rightarrow$ SUSY au LHC...

5) Unification des interactions