Exercice 4.2

1. En combinant les intégrales premières radiale (4.29) et temporelle (4.28),

$$\dot{r}^2 = E^2 - \frac{L^2}{r^2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right), \qquad \dot{t} = \frac{E}{1 - 2m/r}, \tag{4.89}$$

on trouve

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}} = (1 - 2m/r)^{-1}\left[1 - \frac{L^2}{E^2 r^2}(1 - 2m/r)\right]^{-1/2}. \tag{4.90}$$

On peut ensuite écrire le rapport L^2/E^2 en fonction de m et r_0, car

$$E^2 - \frac{L^2}{r_0^2}\left(1 - \frac{2m}{r_0}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{L^2}{E^2} = \frac{r_0^3}{r_0 - 2m}. \tag{4.91}$$

Par conséquent,

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}} = (1 - 2m/r)^{-1}\left[1 - \frac{r_0^3}{r^2(r_0 - 2m)}(1 - 2m/r)\right]^{-1/2} \equiv F(r). \tag{4.92}$$

2. En développant l'expression $F(r)$ par rapport à m, on trouve

$$F(r) = \frac{r}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} + \frac{2m}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} + \frac{m\, r_0}{(r - r_0)^{1/2}(r - r_0)^{3/2}} + \mathcal{O}(m^2). \tag{4.93}$$

En intégrant par rapport à r entre r_0 et r_T, on obtient

$$t(r_0, r_T) = \sqrt{r_T^2 - r_0^2} + 2m \ln \frac{r_T + \sqrt{r_T^2 - r_0^2}}{r_0} + m\sqrt{\frac{r_T - r_0}{r_T + r_0}}. \tag{4.94}$$

Le temps mis par le signal pour faire un aller-retour entre la Terre et la planète P est donc

$$t = 2\,t(r_0, r_T) + 2\,t(r_0, r_P). \tag{4.95}$$