Exercice 5.7

1. Lorsque $a = 0$, $\rho^2 = r^2$ et $\Delta = r(r - 2M)$. Dans ce cas, la métrique de Kerr se réduit à la métrique de Schwarzschild.
2. Dans le plan équatorial, on a $\rho^2 = r^2$.
   (a) Une trajectoire circulaire de type lumière est caractérisée

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{4Ma}{r} dt d\phi + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) d\phi^2 = 0. \qquad (5.155)$$

   On détermine facilement la racine $dt > 0$ du système quadratique ci-dessus. Pour une variation, $\Delta\phi = 2\pi$, on obtient l'expression (5.88). Pour $\Delta\phi = -2\pi$, on trouve

$$T_-(r) = \frac{2\pi}{1 - \frac{2M}{r}} \left(\sqrt{\Delta} + \frac{2Ma}{r}\right). \qquad (5.156)$$

   (b) La condition $T'_\infty = 0$, après multiplication par $(r - 2M)^2\sqrt{\Delta}$, donne la relation (5.89).

3. (a) La métrique (5.87) possède les vecteurs de Killing $\partial/\partial t$ et $\partial/\partial\phi$. On en déduit les deux constantes du mouvement

$$E = -g_{t\mu}\dot{x}^\mu = -g_{tt}\dot{t} - g_{t\phi}\dot{\phi}, \qquad L = g_{\phi\mu}\dot{x}^\mu = g_{t\phi}\dot{t} + g_{\phi\phi}\dot{\phi}, \qquad (5.157)$$

   qui correspondent respectivement à l'énergie de la particule et à son moment cinétique. En inversant le système ci-dessus, on peut écrire $\dot{t}$ et $\dot{\phi}$ en fonction de E, L et des composantes de la métrique.
   Pour une trajectoire lumière, on a également

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = g_{tt}\dot{t}^2 + 2g_{t\phi}\dot{t}\dot{\phi} + g_{\phi\phi}\dot{\phi}^2 + g_{rr}\dot{r}^2 = 0. \qquad (5.158)$$

   En substituant les expressions de $\dot{t}$ et $\dot{\phi}$ en fonction de E et L, on obtient finalement

$$\dot{r}^2 = \frac{g_{\phi\phi}\,E^2 + 2g_{t\phi}\,LE + g_{tt}\,L^2}{g_{rr}\left(g_{t\phi}^2 - g_{tt}\,g_{\phi\phi}\right)} = E^2\left[1 + \frac{a^2 - b^2}{r^2} + \frac{2M(a-b)^2}{r^3}\right]$$

   avec $b \equiv L/E$. (5.159)

   (b) Pour une trajectoire circulaire, on a $\dot{r}^2 = 0$, d'où on déduit

$$b = \frac{\sqrt{\Delta} - \frac{2Ma}{r}}{1 - \frac{2M}{r}}. \qquad (5.160)$$

   On doit également avoir $(\dot{r}^2)' = 0$, ce qui implique

$$(r - 3M)b^2 - 3Ma^2 - a^2 r + 6aMb = 0. \qquad (5.161)$$

   En combinant cette équation avec $\dot{r}^2 = 0$ pour éliminer b^2, on trouve

$$r^3 - 3Mr^2 - 2Ma^2 + 2Mab = 0. \qquad (5.162)$$

   Enfin, en substituant la solution (5.160) pour b, on retrouve, après quelques simplifications, l'équation (5.89).